Chapitre 39

Séries numériques

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeur dans $\mathbb{K}$, i.e. deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1 Séries numériques

1.1 Définitions et notations

Définition 39.1

On appelle série de terme général u_n la **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On pourrait donc dire que la série de terme général u_n correspond à la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cette notation est un peu lourde, on en emploie des plus légères :

Notation. La série de terme général u_n est généralement notée

$$\sum u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n\geq 0} u_n$$

Toutes les notations ci-dessus correspondent à des **suites**, donc des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

Le scalaire $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Il correspond au terme général d'ordre n de la série.

Notation. Le tableau suivant récapitule les notations des séries :

	Suite	Série	
Notation	u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$	
C'est un élément de ...	$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	
Le n-ième terme est noté ...	u_n	$\sum_{k=0}^{n} u_k$	(Somme partielle d'ordre n)
C'est un élément de ...	$\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	
Nota Bene :		u_n	(Terme général de la série)
Sa limite éventuelle est notée ...	$\lim u_n$	$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$	(Somme de la série)
Sa limite est un élément de ...	$\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	

Une série est donc un cas particulier de suite, et toutes les notions et résultats vus pour les suites peuvent s'étendre aux séries, par exemple la convergence.

Définition 39.2 – Convergence d'une série

Pour toute série $\sum u_n$, on distingue deux cas :

- La série $\sum u_n$ est dite convergente si la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite **finie** quand n tend vers $+\infty$. Cette limite est appelée la somme de la série $\sum u_n$.
- Sinon, on dit que la série $\sum u_n$ est divergente.

Notation. En cas de convergence, on note la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Attention aux différentes notations, référez-vous au tableau ci-dessus en cas de doute !

Remarque. Si on demande d'étudier la nature d'une série, il s'agit de déterminer si elle est convergente ou divergente (comme pour une suite), sans forcément calculer la somme.

Méthode

Pour étudier une série, on introduit et on étudie la somme partielle d'ordre n.

Exemple 1. Étudier la nature de la série $\sum(-1)^n$.

1.2 Extensions et propriétés évidentes

Indice de départ différent de 0. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ désigne la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad \text{dont la limite éventuelle est notée} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 39.3

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les suites $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ ont la même nature.

La nature d'une série ne dépend donc pas des premiers termes de la série.

Divergence grossière. Si S_n est la somme partielle de la série $\sum u_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Cela permet de déduire le Théorème suivant.

Théorème 39.4

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \to 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente : on dit qu'elle est grossièrement divergente.

Démonstration. La deuxième assertion découle de la première par contraposée. Montrons la première assertion.

$\square$

Exemple 2. Les séries $\sum(-1)^n$ et $\sum \sin n$ sont grossièrement divergentes.

Si $u_n \to 0$, **on ne peut pas conclure** sur la nature de $\sum u_n$: on verra notamment que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Série télescopique

Définition 39.5

On appelle série télescopique une série $\sum u_n$ dont le terme général est écrit sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour une certaine suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 39.6 – Nature et séries télescopiques

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$$

Démonstration.

$\square$

Remarque. Quitte à faire un changement d'indice dans la série, on peut dire également que $\sum_{n\geq 1}(v_n - v_{n-1})$ converge si et seulement si (v_n) converge.

Exemple 3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ est divergente. Est-ce qu'il y a divergence grossière ?

Exemple 4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

1.3 Séries usuelles

Théorème 39.7

Soit $q\in\mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ est appelée série géométrique de raison q. Cette série converge si et seulement si $|q|<1$, et sa somme vaut alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

- Si $|q|\geq 1$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|q^n| = |q|^n \geq 1$, donc q^n ne peut pas tendre vers 0 : la série diverge grossièrement.
- Si $|q|<1$, alors $q\neq 1$ et la somme partielle vaut, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \qquad \text{car } |q|<1$$

□

Théorème 39.8

Soit $z\in\mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et on a : $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}}$

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction exponentielle en 0. Voir l'exercice du TD 34 □

Exemple 5. Parmi les séries usuelles, on trouve aussi :

- la série harmonique, qu'on verra au Théorème 39.15.
- les séries de Riemann (à ne pas confondre avec les sommes de Riemann) qu'on verra au Théorème 39.16.

1.4 Combinaison linéaire de séries

On a vu que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. : puisque les séries sont des suites, on peut définir les opérations $+$ et de multiplications pour des séries également : pour tout $n_0\in\mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right) + \left(\sum_{n\geq n_0} v_n\right) := \sum_{n\geq n_0}(u_n+v_n)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) := \sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n)$$

Par ailleurs, avec les séries, on trouve souvent les raccourcis “CV” pour “convergente” et “DV” pour “divergente”.

Théorème 39.9 – “CV + CV = CV”

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergente : l’ensemble des séries convergentes forme un s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. De plus, l’application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.

Exemple 6 (“DV + CV = DV”). Soit $\sum u_n$ une série DV et $\sum v_n$ une série CV. Montrer que $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Remarque. Le Théorème et l’Exemple ci-dessus montrent en particulier que l’on ne change pas la nature d’une série en lui ajoutant une série convergente.

Exemple 7 (“DV + DV = ? ”). Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries DV, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum(u_n + v_n)$:

- $\sum 1$ et $\sum n$ divergent (grossièrement), il en va de même pour $\sum(1+n)$
- $\sum 1$ et $\sum(-1)$ divergent mais en les additionnant, la série obtenue converge vers 0.

Avant d’écrire

$$“ \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n ”$$

il faut s’assurer que toutes ces sommes aient un sens (ou au moins deux d’entre elles, car alors la troisième somme a un sens et se déduit des deux autres).

2 Séries à termes (réels) positifs

2.1 Généralités

Dans cette section, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 39.10

On dit que $\sum u_n$ est (une série) à termes positifs si le terme général u_n est un réel positif.

En particulier, si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (S_n) est croissante. Enfin, on a vu qu'une suite croissante converge ssi elle est majorée. Cela justifie le Théorème suivant :

Théorème 39.11 – "CV par majoration de la somme partielle"

Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs**. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle (de rang n). Alors :

- $\sum u_n$ converge ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

- $\sum u_n$ tend vers $+\infty$ (donc diverge) ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée.

Pour déterminer la nature de $\sum u_n$, on peut donc vérifier si la somme partielles S_n est majorée (indépendamment de n !). Toutefois, il est souvent plus facile d'invoquer un argument de comparaison.

2.2 Convergence par inégalités et équivalents

Théorème 39.12 – "CV par une inégalité"

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes **positifs** qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq v_n$$

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge (et les deux limites sont égales à $+\infty$).

Démonstration.

$\square$

Remarque. Si la comparaison $u_n \leq v_n$ n'est valable qu'à partir du rang n_0, on peut appliquer le Théorème ci-dessus aux séries $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} v_n$: on obtient ainsi le même résultat, mais en cas de convergence des deux séries, on a seulement

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

Exemple 8. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\cos^2 n}{2^n}$.

Théorème 39.13 – Règle des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes **positifs** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ CV $\iff \sum v_n$ CV.
Autrement dit, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Le théorème ci-dessus ne permet pas, en cas de convergence (simultanée) de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, de conclure que leurs sommes seraient égales.

Démonstration.

$\square$

Le Théorème 39.13 tombe en défaut sans l'hypothèse de positivité de u_n et v_n ! On verra un contre-exemple en TD. Il faut donc rappeler l'hypothèse de positivité chaque fois qu'on se sert de ce théorème.

Exemple 9. Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Remarque. Si (u_n) et (v_n) sont positives uniquement à partir d'un certain rang n_0, les résultats ci-dessus restent valides, on l'appliquera aux séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$, qui ont la même nature que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

3 Encadrement par comparaison série-intégrale

La comparaison série-intégrale est une technique avancée et assez fine pour déterminer la nature (voire la somme en cas de convergence) d'une série de la forme $\sum f(n)$ avec f une fonction continue (voire continue par morceaux) et monotone. On énonce le résultat ici pour une fonction f décroissante.

Lemme 39.14

Soit f une fonction décroissante qui est définie sur $[n-1, n+1]$. Alors

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)dt$$

Démonstration. Montrons la seconde inégalité : comme f est décroissante, on a $f(n) \geq f(t)$ pour tout $t \in [n, n+1]$. Ainsi par intégration en t de n à $n+1$, on a $\int_n^{n+1} f(n)dt \geq \int_n^{n+1} f(t)dt$, ce qui se réécrit $f(n) \geq \int_n^{n+1} f$. On montre de même l'autre inégalité en utilisant le fait que $f(t) \geq f(n)$ pour tout $t \in [n-1, n]$. □

Méthode – Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités pour n allant de 1 à N avec $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)dt \\ \implies \quad & \int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^{N} f(t)dt \end{aligned}$$

On dispose donc d'un encadrement de la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} f(n)$, ce qui permet d'appliquer le théorème des gendarmes (éventuellement d'un seul côté) et possiblement en déduire la limite de $\sum_{n=1}^{N} f(n)$.

L'application de cette méthode demande d'être très méticuleux : vérifier la monotonie de f aux bons endroit, écrire les inégalités à sommer et surtout préciser la première et la dernière valeur de n (ci-dessus de 1 à N) lorsqu'on somme.

Théorème 39.15

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. On l'appelle la série harmonique.

Pour montrer la *divergence* de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, on va *minorer* le terme général $\frac{1}{n}$ par une comparaison série-intégrale :

Démonstration.

□

Théorème 39.16

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

- Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement.
- Le cas $\alpha = 1$ a été traité : il s'agit de la série harmonique et on sait qu'elle diverge. Le cas suivant suit le même principe : une minoration pour montrer une divergence.
- Si $0 < \alpha < 1$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

  $$\frac{1}{n^\alpha} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

  ce qui après sommation pour n allant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$ donne

  $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} &\geq \int_1^{N+1} t^{-\alpha} dt \\ &= \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^{N+1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 1\right)\end{aligned}$$

  et comme $1-\alpha > 0$, le dernier terme tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. Donc par comparaison, la série de Riemann diverge lorsque $0 < \alpha < 1$.
- On suppose $\alpha > 1$. Pour montrer la *convergence* de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, on va *majorer* le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$.

$\square$

4 Séries à termes réels (quelconques) ou complexes

4.1 Séries absolument convergentes

Étant donné un réel x, on note

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad x^- := \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

on a donc les relations suivantes :

$$x^- \geq 0, \qquad x^+ \geq 0, \qquad x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-$$

En particulier, on a $\sum |u_n| = \sum u_n^+ + \sum u_n^-$. On notera que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont des séries à termes positifs, on peut donc leur appliquer les résultats de la section précédente.

Définition 39.17

On dit que la série $\sum u_n$ est <u>absolument convergente</u> si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

On notera que $\sum |u_n|$ est à termes positifs, ce qui permet d'appliquer les résultats associés à ce type de série.

Théorème 39.18

Toute série absolument convergente est convergente.
La réciproque est fausse (cf ci-après).

Démonstration.

□

Exemple 10. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i n^n}}{n^2}$ est convergente : en effet pour tout $n \geq 1$ on a $\left|\frac{e^{i n^n}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (c'est une série de Riemann). Donc par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i n^n}}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Définition 39.19

On dit qu'une série $\sum u_n$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 11. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est CV (convergente) mais n'est pas ACV (absolument convergente).

Théorème 39.20

Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors (elle est convergente) et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a en effet $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$. En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a le résultat voulu (par continuité de $x \mapsto |x|$). □

Théorème 39.21

Soit $\sum u_n$ une série complexe. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent et si c'est le cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Démonstration.

Si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, alors toute combinaison linéaire de ces deux séries aussi et en particulier $\sum u_n = \sum \mathrm{Re}(u_n) + i \sum \mathrm{Im}(u_n)$ converge et on a l'égalité des limites, à savoir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Réciproquement, on suppose que $\sum u_n$ converge vers un complexe ℓ. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} u_n - \ell\right)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} u_n - \ell\right| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, la série de terme général $\mathrm{Re}(u_n)$ tend vers $\mathrm{Re}(\ell)$. On montre de même que la série de terme général $\mathrm{Im}(u_n)$ tend vers $\mathrm{Im}(u_n)$ et on retrouve l'égalité voulue.

□

4.2 Théorèmes de convergence avec grand-O et petit-o

Théorème 39.22 – Règle des O et des o

Soit $\sum u_n$ une série quelconque et $\sum v_n$ une série à termes positifs. On suppose que $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum v_n$ est CV, alors $\sum u_n$ est ACV donc CV.

Démonstration.

On suppose $u_n = o(v_n)$. Alors en particulier $u_n = O(v_n)$ et par ce qui précède, on a terminé. □

Exemple 12. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{3^n}$.

Méthode

Quand on cherche uniquement la nature d'une série, il peut être avantageux de chercher un développement asymptotique en $\frac{1}{n}$ (ou autre) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 13. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\sin\frac{1}{n}-\tan\frac{1}{n}\right)$.

Exemple 14. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)$.

5 Séries alternées

5.1 Reste d'une série convergente

Définition 39.23

Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Autrement dit, si on note la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et la somme $S_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} u_k$, alors $R_n = S_\infty - S_n$. En particulier, on a toujours

$$R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Cette définition n'a pas de sens si $\sum u_n$ diverge, car alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ne serait pas défini.

Exemple 15. On considère la série géométrique $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{K}$ et $|q| < 1$. Déterminer le reste de cette série.

5.2 Théorème de convergence des séries alternées

Définition 39.24

$\sum u_n$ est dite une série alternée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de u_{n+1} est opposé à celui de u_n.

Si une série $\sum u_n$ est alternée, alors on peut écrire $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive. Le Théorème suivant est énoncé dans le cas où $u_n = (-1)^n v_n$. Cependant, si $u_n = (-1)^{n+1} v_n$, on peut toujours écrire

$$\sum u_n = -\sum (-1)^n v_n$$

et on peut donc appliquer le Théorème qui suit à $\sum (-1)^n v_n$.

Théorème 39.25 – Théorème des séries alternées

Soit $\sum(-1)^n v_n$ une série où (v_n) est une suite réelle (positive) **décroissante** qui **converge vers 0**. Alors :

1. La série $\sum(-1)^n v_n$ est convergente.
2. En notant S_n la somme partielle de rang n et S_∞ la somme de $\sum(-1)^n v_n$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leq S_\infty \leq S_{2n} \tag{$*$}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k$ vérifie

$$|R_n| \leq v_{n+1}$$

Démonstration.

On va montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Regardons leur monotonies. D'une part,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}v_{2n+2} + (-1)^{2n+1}v_{2n+1} \\ &= v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

car (v_n) est décroissante. Donc (S_{2n}) est décroissante. D'autre part,

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3}v_{2n+3} + (-1)^{2n+2}v_{2n+2} \\ &= -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

donc (S_{2n+1}) est croissante. Enfin, comme (v_n) tend vers 0,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{n+1}v_{n+1} \to 0$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes : elles convergent vers la même limite qu'on note ℓ. De plus, comme (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) est croissante, ces deux suites encadrent la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$$

Comme $S_{2n} \to \ell$ et $S_{2n+1} \to \ell$, on peut montrer que $S_n \to \ell$ en revenant à la définition de la limite.

□

Exemple 16. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Est-elle absolument convergente ?

6 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour étudier une série, on introduit et on étudie la somme partielle d'ordre n.

Méthode – Nature d'une série $\sum u_n$

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$, on peut utiliser les méthodes suivantes :

1. Si u_n ne tend pas vers 0, il y a divergence grossière.
2. Reconnaitre une série usuelle : $\sum q^n$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$
3. Si la série $\sum u_n$ est alternée, on peut utiliser le théorème associé.
4. Si $u_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang) :
   (a) Utiliser un théorème de comparaison : $\leq$ / $\geq$ / O / o / $\sim$
   (b) Étudier si la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.
5. Si $\sum u_n$ n'est pas à termes positifs ni alternée, on peut montrer que la série $\sum u_n$ est ACV, en s'inspirant des méthodes ci-dessus.
6. Poser f telle que $u_n = f(n)$ et réaliser une comparaison série-intégrale.
7. Faire des réécritures : sommes téléscopiques, technique $+1-1$, etc.